Криптографија

З А Д А Ц И

Задатак 1. *Представити највећи заједнички дјелилац бројева 93 и 81 у облику њихове линеарне комбинације.*

Задатак 2. *Доказати да су n и $n+1$ релативно прости за свако $n \in \mathbb{N}$.*

Задатак 3. *Доказати да су $n!+1$ и $(n+1)!+1$ релативно прости за свако $n \in \mathbb{N}$.*

Задатак 4. *Нека су a и b узастопни цијели бројеви и n природан број. Доказати да је $\textbf{нзд}(an+b, bn+a)$ непаран број.*

Задатак 5. *Нека су a и b цијели бројеви. Ако је $\textbf{нзд}(a,b)=1$, доказати да је $\textbf{нзд}(a+b, a-b) \leq 2$.*

Задатак 6. *Доказати да је $mn(m^4-n^4)$ дјељив са 30 за свако $m, n \in \mathbb{N}$.*

Задатак 7. *Ако су a, b и c цијели бројеви такви да је $\textbf{нзд}(a,b)=1$ и $c \mid a+b$, доказати да је $\textbf{нзд}(a,c)=\textbf{нзд}(b,c)=1$.*

Задатак 8. *Ако су a, b и m цијели бројеви такви да је $\textbf{нзд}(a,b)=1$ и $m \mid a$, доказати да је $\textbf{нзд}(m,b)=1$.*

Задатак 9. *Нека су m, n и a природни бројеви, при чему је $a>1$. Показати да је*

$$\textbf{нзд}(a^m-1, a^n-1) = a^{\textbf{нзд}(m,n)}-1.$$

Задатак 10. *Ако су x и y реални бројеви, онда је $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ једнако 0 или 1, доказати да је*

$$\lfloor x+y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor, \ \ \{x+y\} \leq \{x\}+\{y\}.$$

Задатак 11. *Доказати да бројеви 2^n-1 и 2^n+1, за $n>2$, не могу бити истовремено прости.*

Задатак 12. *Одредити све природне бројеве* $n > 1$ *за које је број* $\dfrac{n(n+1)}{2} - 1$ *прост.*

Задатак 13. *Ако је* p *прост број, онда из* $p \mid a^k$ *слиједи* $p \mid a$*, а одатле* $p^k \mid a^k$*. Да ли вриједи исти закључак уколико је* p *сложен број?*

Задатак 14. *Ако је* p *прост број, а* a, b *природни бројеви, испитати који је од следећих исказа тачан.*

а. *Ако је* $\mathbf{нзд}(a, p^2) = p$ *онда* $\mathbf{нзд}(a^2, p^2) = p^2$.

б. *Ако је* $\mathbf{нзд}(a, p^2) = p$ *и* $\mathbf{нзд}(b, p^2) = p^2$ *онда* $\mathbf{нзд}(ab, p^4) = p^3$.

в. *Ако је* $\mathbf{нзд}(a, p^2) = p$ *и* $\mathbf{нзд}(b, p^2) = p$ *онда* $\mathbf{нзд}(ab, p^4) = p^2$.

г. *Ако је* $\mathbf{нзд}(a, p^2) = p$ *онда* $\mathbf{нзд}(a + p, p^2) = p$.

За сваки од исказа дати доказ или контрапримјер.

Задатак 15. *Ако је* $n^4 + 4^n$ *прост број за* $n \in \mathbb{N}$*, онда је* $n = 1$.

Задатак 16. *Наћи све просте бројеве* p *за које вриједи да је* $p+2$ *такође прост.*

Задатак 17. *Нека су* n *и* q *природни бројеви. Доказати да је број умножака броја* q *у скупу* $1, 2, \ldots, n$ *једнак* $\lfloor n/q \rfloor$*. На основу овог показати да вриједи да ако је* p *прост број и* e *највећи природан број такав да* $p^e \mid n!$*, онда је*

$$e = \lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \lfloor n/p^3 \rfloor + \cdots .$$

Задатак 18. *Доказати да је за цијеле бројеве* a, b *и природан број* n

$$\mathbf{нзд}(a^n, b^n) = \mathbf{нзд}(a, b)^n \text{ за } n \geq 1.$$

Задатак 19. *Претпоставимо да су* p *и* $p+2$ *прости бројеви и* $p > 3$*. Доказати да је њихов збир* $2p+2$ *дјељив са 12.*

Задатак 20. *Нека је* n *природан број већи од 2. Доказати да постоји прост број* p *за који важи* $n < p < n!$.