

# Алгебра III

Задаци за рад код куће

## Проширења поља. Теорија Галоа.

**Задатак 1.** Нека је  $F = \mathbb{Q}(i)$ . Доказати да су полиноми  $x^3 - 2$  и  $x^3 - 3$  иредуцибилни над  $F$ .

**Задатак 2.** Нека је  $a$  нула полинома  $x^3 + x + 3$  који је несводљив над  $\mathbb{Q}$ . Знамо да је полином  $x^2 - 2$  несводљив над  $\mathbb{Q}$ . Да ли је  $x^2 - 2$  несводљив над  $\mathbb{Q}(a)$ ?

**Задатак 3.** Нека је  $F = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , гдје је  $\alpha_i^2 \in \mathbb{Q}$ , за  $i = 1, 2, \dots, n$ . Доказати да  $\sqrt[3]{2} \notin F$ .

**Задатак 4.** Ако је  $[F(\alpha) : F]$  непарно, онда је  $F(\alpha) = F(\alpha^2)$ . Доказати.

**Задатак 5.** Конструисати поља величине

$$(a)9 \quad (b)49 \quad (c)8 \quad (d)16.$$

**Задатак 6.** Доказати да је  $x^3 - 2x - 2$  иредуцибилан над пољем рационалних бројева  $\mathbb{Q}$ . Нека је  $\theta$  коријен датог полинома. Израчунати

$$(1 + \theta)(1 + \theta + \theta^2) \quad \text{и} \quad \frac{1 + \theta}{1 + \theta + \theta^2}$$

у  $\mathbb{Q}(\theta)$ .

**Задатак 7.** Одредити факторизацијска поља следећих полинома над пољем рационалних бројева, као и степен њиховог проширења

a.  $x^4 - 5$

b.  $x^3 - x^2 - x - 2$

c.  $(x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^2 - 5)$

**Задатак 8.** Одредити групу Галоа полинома

$$p(x) = x^4 + 1$$

над пољем рационалних бројева. Одредити одговарајуће подгрупе и потпоља факторизацијског поља.